## Septiembre-Diciembre 2018

## MA2115 - Matemáticas IV

## Solución Parcial 1 (30 %)

### Turno 6-7

**Pregunta 1**

(6 ptos.) Sea la sucesión cuya fórmula de recursión viene dada por

$$a_{n+1} = 5 - \frac{4}{a_n}, \quad \text{si } n \geq 0$$

**a)** Estudie la convergencia de la sucesión si $a_0 = 4$.

**b)** Estudie la convergencia de la sucesión si $a_0 = 2$.

**Solución**

**a)** Si $a_0 = 4$, escribiendo los primeros términos de la sucesión vemos que

$$\{a_n\} = \{4, 4, 4, 4, \cdots, 4, \cdots\}$$

Es decir, la sucesión es una sucesión constante $a_n = 4 \, \forall \, n \geq 0$. Por tanto, $\boxed{\text{la sucesión converge a 4}}$.

**b)** Si $a_0 = 2$, escribiendo los primeros términos de la sucesión vemos que

$$\{a_n\} = \{2, 3, \frac{11}{3}, \frac{43}{11}, \frac{171}{43} \cdots\}$$

En donde pareciera ser una sucesión creciente y acotada superiormente por 4. Veamos:

**Acotamiento.** Usaremos inducción matemática para probar que $a_n < 4 \, \forall \, n \geq 0$.

- Paso base: $a_0 = 2 < 4$, $a_1 = 3 < 4$
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $a_k < 4 \, \forall \, k \geq 0$.
- Paso inductivo: Queremos ver que $a_{k+1} < 4 \, \forall \, k \geq 0$. Por la hipótesis inductiva tenemos que $a_k < 4$. De aquí que $-\frac{4}{a_k} < -\frac{4}{4} = -1$. Sumando 5 a ambos lados de la desigualdad tenemos que $a_{k+1} = 5 - \frac{4}{a_k} < 5 - 1 = 4$. Concluyendo así lo deseado.

Por tanto, $\{a_n\}$ está acotada superiormente por 4.

De igual forma podemos probar que la sucesión está acotada inferiormente por 1. Es decir, $a_n > 1$ para todo $n$. Así, la sucesión es acotada.

**Monotonía**. Para probar el crecimiento de la sucesión consideraremos la diferencia

$$a_{n+1} - a_n = 5 - \frac{4}{a_n} - a_n = \frac{5a_n - 4 - a_n^2}{a_n} = \frac{(a_n - 1)(4 - a_n)}{a_n}$$

Observemos que todos los factores involucrados son positivos, ya que $1 < a_n < 4$ para todo $n$, como se probó anteriormente. De donde concluimos que $a_{n+1} - a_n > 0$, o $a_{n+1} > a_n$ para todo $n$. Es decir, la sucesión es monótona creciente.

Finalmente, por el teorema de convergencia monótona, como la sucesión es monótona y acotada, ésta tiene límite, digamos $l$. Por lo que se debe cumplir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l$. Aplicando el límite a la fórmula de recursión tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(5 - \frac{4}{a_n}\right) \\ l &= 5 - \frac{4}{l} \end{aligned}$$

De donde se obtiene la ecuación cuadrática $l^2 - 5l + 4 = 0$, cuya factorización es $(l-1)(l-4) = 0$. Es decir, $l = 1$ o $l = 4$. Por los datos recolectados anteriormente, es claro que $l = 1$ se descarta pues la sucesión comienza en 2 y es creciente. De manera que concluimos que $\boxed{\text{la sucesión es convergente y tiene límite } l = 4}$.

**Pregunta 2**

(4 ptos. c/u) Determine la convergencia o divergencia de las siguientes series. En caso de converger, halle la suma:

**a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+2+\cdots+k}+3\left(\frac{\pi-3}{\pi}\right)^{k-1}\right]$

**b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2\sqrt[3]{k}}{k^3+1}$

**Solución**

**a)** Separamos la serie de la siguiente forma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+2+\cdots+k}+3\left(\frac{\pi-3}{\pi}\right)^{k-1}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+k}+\sum_{k=1}^{\infty}3\left(\frac{\pi-3}{\pi}\right)^{k-1}$$

Estudiamos la primera serie, que denotaremos por **(1)**. Notamos que el denominador del término general es la suma de los primeros $k$ términos, cuya fórmula cerrada es conocida:

$$\sum_{i=1}^{k}i=\frac{k(k+1)}{2}$$

De modo que la serie **(1)** se puede reescribir como

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)}$$

Sacando el factor constante 2 del término general de la serie, la fracción restante se puede descomponer en fracciones simples de modo que la serie **(1)** queda:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

Considerando la sucesión de sumas parciales de esta serie, $2S_n$, se reconoce fácilmente como una suma telescópica, y tenemos que

$$2S_n=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

De donde se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty}2S_n=2$; y por la definición de convergencia de una serie infinita tenemos que la serie **(1)** converge y su suma es 2.

A continuación, estudiaremos la segunda serie, que denotaremos **(2)**. Notemos que está expresada como una serie geométrica de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

donde, en nuestro caso, $a = 3$ y $r = \frac{\pi-3}{\pi}$. Sabemos que esta serie converge siempre que $|r| < 1$. Como $r$ se puede reescribir como $1 - \frac{3}{\pi}$, es claro que es menor que 1. Por tanto, la serie **(2)** converge y su suma, $S$, es conocida:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-(1-\frac{3}{\pi})} = \pi$$

Finalmente, como la serie original se descompuso en la suma de dos series convergentes, concluimos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{1+2+\cdots+k} + 3\left(\frac{\pi-3}{\pi}\right)^{k-1} \right]$$

$\boxed{\text{converge}}$ y su suma es $\mathbf{(1)} + \mathbf{(2)} = \boxed{2+\pi}$

**b)** Sea $a_n = \dfrac{n^2\sqrt[3]{n}}{n^3+1}$, el término general de la serie. Usaremos el criterio de comparación al límite, donde la serie de prueba, $\sum b_n$, es $\sum \dfrac{1}{n^{2/3}}$. Consideramos entonces el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1$$

Como el límite es finito y distinto de cero, entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen simultáneamente. Luego, la serie $\sum b_n$ diverge por ser una serie hiperarmónica (serie $p$) con $p = \frac{2}{3} < 1$. Por lo tanto, concluimos que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2\sqrt[3]{k}}{k^3+1} \qquad \boxed{\text{diverge}}$$

**Pregunta 3**

(6 ptos.) Determine el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k)!\,(2x-3)^{k+1}}{(2k+1)!}$$

**Solución**

Primero notamos que como $(2k+1)! = (2k+1)(2k)!$ la serie de potencias se puede reescribir como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2x-3)^{k+1}}{2k+1}$$

Ahora aplicamos el criterio de D'Alembert (de la razón) a la serie de módulos. Tenemos el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|\frac{(2x-3)^{n+2}}{2n+3}\,\frac{2n+1}{(2x-3)^{n+1}}\right| = |2x-3|\lim\frac{2n+1}{2n+3} = |2x-3|$$

Como buscamos convergencia, es necesario que este límite sea menor que 1. De donde se deduce que $|2x-3| < 1$. O análogamente que $-1 < 2x-3 < 1$. Y así que $1 < x < 2$. Es decir, la serie de potencias converge absolutamente cuando $x \in (1,2)$. Falta ver los extremos.

Si $x = 1$, la serie queda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

Por el criterio de comparación al límite, esta serie diverge al compararla con la serie armónica divergente.

Si $x = 2$, la serie queda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(1)^{k+1}}{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

La cual se comporta como la serie armónica alternante. De esta manera se deduce por el criterio de Leibniz que esta serie converge condicionalmente.

Finalmente, tenemos que el intervalo de convergencia de la serie de potencias es $\boxed{(1,2]}$.

**Pregunta 4**

(6 ptos.) Represente la serie de Maclaurin de la siguiente función e indique el intervalo de convergencia:

$$f(x) = \int_0^x \left( \frac{\operatorname{sen} t}{t} - e^{-t^2} \right) \mathrm{d}t$$

**Solución**

Separamos la función por las propiedades de la integral definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \int_0^x \left( \frac{\operatorname{sen} t}{t} - e^{-t^2} \right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} \mathrm{d}t - \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t = g(x) + h(x)$$

donde $g(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} \mathrm{d}t$, y $h(x) = -\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$. Hallamos las series de Maclaurin de estas funciones, y la suma de ellas será la serie de Maclaurin de $f(x)$.

Comenzamos con $g(x)$. Es conocida la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen}(x)$ definida para todo $x$ real:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

Haciendo el cambio $x = t$ y dividiendo todo por $t$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} t}{t} &= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{t} \left( t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \cdots \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} \cdots \end{aligned}$$

Luego, aplicamos la integral definida a ambos lados:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} \mathrm{d}t &= \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} \right) \mathrm{d}t = \int_0^x \left( 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} \cdots \right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} \cdots \end{aligned}$$

La cual es la serie de Maclaurin de $g(x)$, definida para todo $x$ real (si $x = 0$ sigue estando bien definida).

Ahora hallemos la representación de $h(x)$. Es conocida de igual forma la serie de Maclaurin de la función exponencial, $e^x$, definida para toda $x$ real:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

Haciendo un cambio de variable $x = -t^2$, tenemos

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k}}{k!} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} \cdots$$

Aplicando la integral definida a esta última expresión y multiplicando por menos 1, tenemos

$$\begin{aligned} -\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t &= -\int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k}}{k!} \right) \mathrm{d}t = -\int_0^x \left( 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} \cdots \right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, x^{2k+1}}{(2k+1)\, k!} = -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} \cdots \end{aligned}$$

La cual es la serie de Maclaurin de $h(x)$ para toda $x$ real.

Finalmente, tenemos que $f(x) = g(x) + h(x)$, para toda $x$ real. Esto es,

$$\begin{aligned} f(x) = \int_0^x \left( \frac{\operatorname{sen} t}{t} - e^{-t^2} \right) \mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} \mathrm{d}t - \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, x^{2k+1}}{(2k+1)\, k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{2k+1} \left[ \frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{k!} \right] \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, x^{2k+1}}{2k+1} \left[ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(2k+1)!} \right]} \end{aligned}$$

**Pregunta 5**

(1 pto. c/u) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

**a)** La serie alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt[3]{k}}$ converge condicionalmente.

**b)** Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ divergen, entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}$ diverge.

**c)** Si la serie de términos positivos $\sum a_n$ diverge entonces se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

**d)** Por el criterio de comparación ordinaria si la serie de términos positivos $\sum a_n$ domina a una serie divergente, $\sum b_n$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

**Solución**

**a)** **Falso.** Al considerar la serie de valores absolutos, la serie $\sum \frac{1}{k\sqrt[3]{k}}$ converge por ser una serie hiperarmónica (serie $p$), con $p = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1$. Por tanto, la serie original converge absolutamente.

**b)** **Falso.** Si consideramos las sucesiones $a_n = n$, $b_n = -n$. Claramente ambas sucesiones divergen a $\infty$ y $-\infty$ respectivamente al tomar el límite. Mientras que la sucesión $\{a_n + b_n\} = \{n + (-n)\} = \{0\}$, es una sucesión constantemente igual a cero, por tanto converge a cero.

**c)** **Falso.** Si consideramos la serie armónica divergente $\sum \frac{1}{n}$, es una serie de términos positivos y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

**d)** **Verdadero.** Dicho de otra manera, el criterio de comparación ordinaria establece que si $0 < b_n < a_n$ para $n$ lo suficientemente grande, y la serie $\sum b_n$ diverge; entonces la serie $\sum a_n$ también diverge.

Prof. Jorge Sánchez
jorgesanchez@usb.ve